

Kehittyneiden optimointimenetelmien sovellus sahan tuotannosuunnittelussa

Hannu Rummukainen

VTT, Vuorimiehentie 3, PL 1000, 02044 VTT
Puh. 020 722 6057, hannu.rummukainen@vtt.fi

Timo Korvola

VTT, Vuorimiehentie 3, PL 1000, 02044 VTT
Puh. 020 722 6023, timo.korvola@vtt.fi

Matti Ketonen

Metsäliitto Osuuskunta, Tuulikuja 2, PL 50, 02020 Metsä
matti.ketonen@finnforest.com

AVAINSANAT sahatteollisuus, tuotannosuunnittelu, tukkien lajittelu, sekalukuoptimointi

TIIVISTELMÄ

Sahatavaran saanto ja laatu riippuvat olennaisesti tukkien mitoista ja muodosta, joita ei voida tarkasti ennakoita ennen sahalle toimitettujen tukkien mittausta. Tukit lajitellaan sahalla mittaustulosten perusteella koneellisesti lajittelulokeroihin, joita on rajattu määrä. Olemme tutkineet, kuinka tukkien lajittelusäännöt tulisi suunnitella optimaalisesti niin, että sahattavat tuotteet täyttävät asiakkaiden tilaukset mahdollisimman hyvin ja tuotteiden myyntituotto maksimoituu. Suunnittelun pohjana käytetään muutaman kuukauden pituisen suunnittelujakson tilauskantaa, tukkitilauksia ja tukkiennusteita.

Lajittelusäännöissä kullekin lokerolle määritellään tukkien latvaläpimittaväli millimetrin tarkkuudella sekä mukaan otettavat pituusluokat. Koska jokainen tukki on lajiteltava yksikäsitteiseen lokeroon, lajittelusääntöjen muodostaminen itsessään voidaan käsittää läpimitta-pituusluokkaparien muodostaman joukon ositustehtäväksi. Diskreetti ositustehtävä yhdistettiin lineaarioptimointimalliin, joka kattaa tukkien jaon sahauseriin, sahausprosessin ja tuotteiden sijoittelun asiakastilauksiin tai myyntivarastoon. Sahausprosessin mallintamiseen käytimme VTT:llä kehitettyä sahaussimulaattoria, jolla voitiin laskea tietyn kokoisesta tukista tietyllä sahausasetteella saatavien tuotteiden määrät ja laadut.

Sovelsimme tukkien lajittelun suunnittelutehtävän ratkaisemiseksi heuristista VLSN-hakualgoritmia ("Very Large Scale Neighbourhood"), jolla hyvän ratkaisun löytäminen vei 10–20 tuntia laskenta-aikaa. Toteuttamamme ohjelmiston avulla arvioitiin erään Metsäliiton sahan lajittelun parannuspotentiaalia eri skenaarioissa sekä sitä, kuinka suuri hyöty saavutettaisiin kasvattamalla lajittelulokeroiden määrää. Lopuksi arvioimme käyttämämme laskennallisesti raskaan optimointimenetelmän käytäntöön soveltamisen edellytyksiä.

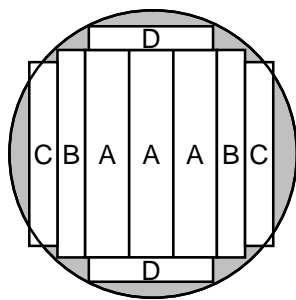
1 JOHDANTO

Koska sahatteollisuuden tuotantokustannuksista suurin osa on raaka-ainekustannuksia, raaka-aineen tehokas hyödyntäminen on keskeinen taloudellisen kannattavuuden tekijä. Käytännössä raaka-aineen täydellinen hyödyntäminen on vaikeaa, sillä vaikka jokainen tukki on erilainen mitoiltaan, muodoltaan ja oksaisuudeltaan, tuotannollisista syistä erikokoisia tukkeja on sahattava suurina sahauserinä samalla sahausasetteella.

Suomessa tukit katkotaan jo metsässä pituusluokkiin, jotka vastaavat yksi yhteen sahatavaran vakiopituuksia. Sahalle tuodut tukit mitataan koneellisesti ja lajitellaan tukin laadun, tehollisen latvaläpimitan ja pituuden perusteella. Tukin laatu viittaa siihen, onko tukki katkaistu tyvestä vai latvasta. Tukin muototekijät kuten lenkous ja kartiokkuus otetaan huomioon korjauksina läpimittaan. Lajittelukone sijoittaa tukin sille annettujen lajittelusääntöjen perusteella yhteen lokeroista, joita on tyypillisesti muutamia kymmeniä. Lajittelusäännöissä kutakin lokeroa vastaavalle *tukkiluokalle* määritellään latvaläpimittaväli millimetrin tarkkuudella sekä joukko mukaan otettavia pituusluokkia.



Kuva 1 Lajittelukoneen lokeroita ja sahan tukkikenttä, jonne kunkin tukkiluokan tukit varastoidaan ennen sahausta. Kuvälähde: KnowTimber v3.1 (2007)



Kuva 2 Sahausasete, jolla tukista sahataan neljää tuotedimensiota (A – D). Kuvassa tukin läpimitta on niin pieni, että tuote C jää ns. vajaasärmäiseksi.

23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
23D	23D	9M	23D	8M	23D	23D	23D
24D	24D	9M	24D	8M	24D	24D	24D
24D	24D	9M	10M	8M	24D	24D	24D
24D	24D	9M	10M	8M	24D	24D	24D
24D	11M	11M	10M	8M	24D	24D	24D
24D	11M	11M	10M	24D	24D	24D	24D

→ pituusluokat
 ↓ läpimitta mm

Kuva 3 Yksityiskohta tukkiluokkien esityksestä pituusluokkien ja läpimittojen muodostamassa koordinaatistossa. Kunkin tukkikoon kohdalla on tukkiluokan koodi: läpimittaluokkien koodit päättyvät D:hen ja pituus-läpimittaluokkien M:ään.

Kun tukkiluokan tukkeja on kertynyt riittävästi, ne sahataan yhtenä sahauseränä erikseen valitulla sahausaseteella. Yhdellä sahausaseteella tukista syntyy useita eri sahatavara tuotteita, joista erityisesti pintalaudat voivat jäädä huonolaatuisiksi, jos tukki on liian pieni (Kuva 2). Jos taas tukki on liian suuri, osa raaka-aineen arvosta jää hyödyntämättä. Käytännössä tukkiluokkaan voidaan joutua sijoittamaan sekä ideaalista pienempiä että suurempia tukkeja, jos tuotteiden kysyntä on suuri suhteessa idealikokoisten tukkien tarjontaan, tai jos ”väärän kokoisille” tukeille ei voida varata erillistä lajittelulokeroa.

Tukkien lajittelusääntöjen suunnittelu on nykyisin täysin ihmisen päätösten varassa, vaikka apuna käytetäänkin tietokoneavusteisia laskelmia tuotteiden saannoista ja tilausten toteutumisesta. Lajittelusääntöjä päivitetään vähän kerrallaan tilauskannan ja tukkien markkinatilanteen muuttuessa, mutta erityisesti suuret muutokset ovat hankalia suunnitella. Toteuttamaamme ratkaisua vastaavia valmiita optimointiratkaisuja tukkien lajittelun suunnitteluun ei tietääksemme ole markkinoilla. Kirjallisuudessa julkaistuissa lajittelun optimointiratkaisuuksissa /2/ ja /3/ (luku 11) lajitteluperusteena on pelkkä läpimitta, mikä ei vastaa nykyaikaisen sahatuotannon tarpeita.

2 OPTIMOINTITEHTÄVÄ

Määritelimme lajittelun tehostamis potentiaalin arvioimiseksi optimointitehtävän, jonka keskeisinä päätösinä ovat tukkiluokkien määrittely annetun suunnittelujakson ajaksi ja tukkiluokkien jako sahauseriin. Suunnittelujaksoa käsitellään kokonaisuutena, eikä mallissa huomioida esim. sahausjärjestystä. Tavoitteena on, että sahattavat tuotteet täyttävät asiakkaiden tilaukset mahdollisimman hyvin ja tuotteiden myyntituotto maksimoituu. Lisäksi tilaamattomien tuotteiden tuottamista varastoon on vältettävä. Kaikki tavoitteet esitetään lineaarisessa kohdefunktiossa vähentämällä myyntituotosta muiden tavoitteiden rikkomista kuvaavat laskennalliset sakkokustannukset. Optimointitehtävä kuvataan formaalisti liitteessä A.

Lajittelussa käytetään kahdenlaisia tukkiluokkia: *läpimittaluokkia*, joihin käyvät kaikki pituudet, ja *pituusläpimittaluokkia*, joihin poimitaan vain erikseen valitut pituudet (Kuva 3). Pituusläpimittaluokat eivät voi olla päällekkäisiä (tietyt kokoinen tukki sopii vain yhteen niistä), mutta ne voivat peittää osan läpimittaluokasta. Pituusläpimittaluokkien ja läpimittaluokkien yhdessä on katettava kaikki mahdolliset tukit. Näiltä osin tehtävä on luonteeltaan vaikea diskreetti optimointitehtävä. Kuvasimme koko suunnittelutehtävän lineaarisena sekalukuoptimointitehtävänä, jossa jokaista mahdollista tukkiluokkaa vastaa kokonaislukumuuttuja.

Suunnittelujaksolla sahattavat tukit määritellään tukkitilausten ja tukkiennusteiden perusteella. Historia-tiedoista kerätyn läpimittajakauman avulla voidaan arvioida sahattava kokonaistilavuus jokaiselle tukin pituusluokalle ja läpimitalle millimetrin tarkkuudella. Emme ottaneet arvion epävarmuutta eksplisiittisesti huomioon optimointimallissa, mutta suoritimme kuitenkin laskentakokeiluja erilaisilla tukkien kokojakauilla.

Kukin tukkiluokka voidaan jakaa yhteen tai useampaan sahauserään, joissa on oltava vähintään tietty minimimäärä tukkeja. Kun tunnetaan sahattavien tukkien kokonaistilavuudet tietyllä läpimittavälillä eri pituuksilla, sahauserän kokorajoite tarkoittaa, että potentiaalisesta tukkiluokasta on sahattava yhdessä sahauserässä (yhdellä sahausasetteella) vähintään tietty minimiosuus.

Sahatavaran saanto annetusta tukkiluokan tilavuudesta ja sahatavaran sijoittelu asiakastilauksiin tai varastoon kuvataan optimointitehtävässä lineaaristen rajoitteiden kautta. Sahaussimulaattorin /3/ avulla laskettiin etukäteen jokaiselle mahdolliselle tukkikoolle ja sahausasetteelle, kuinka paljon yhdestä tukkiuutiometristä saadaan mitään tuotetta missäkin laatuluokassa. Sahaussimulaattori teki myös sahatavaran katkontapäätökset tapauksissa, joissa lauta jäisi vajaasärmäiseksi vain osalta pituudestaan. Sahatavaran kuivaustavan vaikutukset tuotteen laatuun ja arvoon katsottiin kokonaismerkitykseltään vähäisiksi ja ne jätettiin mallintamatta.

Optimointitehtävässä sahatavaratuotteet yksilöidään tarkasti leveyden, paksuuden, pituuden ja laatuluokan perusteella. Myös sahausksen sivutuotteet hake ja sahanpuru käsitellään tuotteina. Kullakin tuotteella on myyntihinta tilavuusyksikköä kohti, ja hinta voi vaihdella myös asiakaskohtaisesti. Asiakastilaukset kuvataan tuotekohtaisina toimitusmäärän (m^3) vaihteluväleinä: minimimitavoitteen alituksesta lasketaan sakkokustannus puuttuvaa kuutiometriä kohti, ja maksimimäärä on ehdoton yläraja. Sakkokustannuskerroin riippuu asiakasryhmästä; ryhmittely kuvaa asiakassuhteen tärkeyttä sahalle.

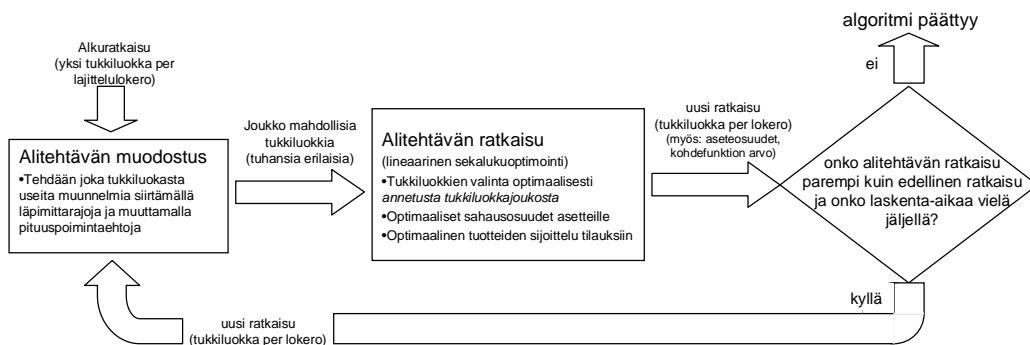
Sahauserä voidaan lajitella laatuluokkiin usealla eri tarkkuudella sahatavaran käyttötarkoituksesta riippuen. Yksinkertaisuuden vuoksi oletimme laatulajittelun tapahtuvan tarkimmalla tasolla (tukin keskiosan ns. sydäntavaralle kolme luokkaa ja sivulaudoille neljä), ja muodostimme epätarkemmin lajitellut tuotteet (käytännössä ns. ST-laadun tuotteet) yhdistelminä tarkasti kuvatuista laatuluokista. Optimointitehtävässä tilaus voi siksi koostua useammasta kuin yhdestä tuotteesta, joita on tuotettava annetussa suhteessa.

Sahatavaraa voidaan tuottaa myös varastoon, jos tuotteelle ei ole asiakastilauksia tai tuotteen asiakastilausten kokonaistilavuus ylittyy. Kunkin tuotteen tuotannolle varastoon (m^3) on arvioitu maksimimäärä (*varastorajoite*), joka perustuu tuotteen ennakoituun menekkiin suunnittelujaksolla. Maksimimäärän ylityksestä lasketaan sakkokustannus ylimääräistä kuutiometriä kohti.

Sekä asiakastilaukset että varastorajoitteet esitetään optimointitehtävässä osatilauksina, jotka kuvaavat tietyn tuotteen tai tuoteyhdistelmän tuotannon arvon vaihteluvälillä, jolla tuotannon marginaalinen arvo kuutiometriä kohti on vakio. Tyypillisillä tuotteiden yksikköarvoilla, tilausten minimimitavoitteiden sakkokertoimilla ja varastotuotannon maksimimäärien sakkokertoimilla yksittäisen tuotteen tuotanto ohjautuu ensin kuhunkin asiakastilaukseen niiden minimimitavoitteisiin saakka, seuraavaksi kuhunkin asiakastilaukseen niiden maksimimääriin saakka, ja lopulta varastotuotannoksi ja varastotuotannon maksimimäärän ylitykseksi. Tässä siis tuotteen marginaalinen arvo kuutiometriä kohti, johon lasketaan myyntihinnan ohella em. sakkokustannukset, pienenee aina seuraavaan vaiheeseen siirryttäessä.

2.1 YKSINKERTAISTETTU MALLI

Koska lajittelun suunnittelutehtävä sellaisenaan on vaikea ratkaista, määrittelimme optimointitehtävästä myös yksinkertaistetun version, jossa lajittelun rajoituksia ja sahauserien minimikokoa ei oteta huomioon, vaan jokaisen tukin voi sahata yksilöllisesti eri sahausasetteella. Yksinkertaistettu tehtävä on puhtaasti jatkuva lineaarinen optimointitehtävä ja sen ratkaisu vei kokeiluissa laskenta-aikaa noin minuutin. Riippumatta sahan lajittelulokeroiden määrästä ja tukkiluokkien muotoilusta yksinkertaistettu malli antaa ylärajan lajittelun suunnittelutehtävän kohdefunktion arvolle.



Kuva 4 Toteutetun hakualgoritmin toiminta. Tyypillisesti algoritmi päättyy ennenaikaisesti laskenta-ajan loppuessa. Myös alitehtävän ratkaisu keskeytetään, kun selvästi entistä parempi ratkaisu löytyy.

3 RATKAISUMENETELMÄ

Optimointitehtävän ratkaisemiseksi sovelsimme VLSN-hakua (very large-scale neighbourhood; menetelmästä käytetään myös lyhennettä VLNS, very large neighbourhood search). Kyseessä on eräänlainen lokaali haku eli iteraatio, jossa ratkaisun ympäristöstä yritetään löytää aina nykyistä parempi ratkaisu. VLSN-haulla on tunnusomaista, että ratkaisun ympäristöä ei käydä läpi eksplisiittisesti kaikkia vaihtoehtoja kokeilemalla, vaan implisiittisesti jotain epätriviaalia optimointialgoritmia soveltaen [1]. Lajittelun suunnittelutehtävään kehittämässämme VLSN-hakualgoritmissa kullakin iteraatiolla ratkaistaan alitehtävänä rajoitettu versio lajittelun optimointitehtävästä, jossa on mahdollista käyttää vain edellisessä ratkaisussa mukana olleita tukkiloikkia sekä näiden muunnelmia (Kuva 4). Muunnelmien valinnassa hyödynsimme duaalihhinnoittelua.

Toteutimme hakualgoritmin C++-kielellä ja alitehtävien ratkaisuun käytimme kaupallista ILOG CPLEX-optimointiohjelmistoa. Suorituskykyisistä VLSN-haun alitehtävissä ei huomioitu sahauserien minimikokorajoitteita, eli tukkiloikasta sai sahata pieniä määriä lukuisilla eri sahausaseteilla. Sahauserien minimikokorajoitteet toteutettiin erillisessä jälkikäsitteilyvaiheessa, jossa varsinaisen hakualgoritmin tuottaman ratkaisun tukkiloikat kiinnitettiin ja näin muotoiltu optimointitehtävä ratkaistiin lineaarisena sekalukutehtävänä.

VLSN-haku on heuristinen optimointialgoritmi, eli sen tulosten optimaalisuutta ei voida todistaa. Algoritmin todettiin kuitenkin löytävän parannuksia alkuratkaisuun kaikissa laskentakokeilujen skenaarioissa. Suurimmat parannukset alkuratkaisuun löytyivät tyypillisesti 2–3 tunnin kuluessa. Yli 0,1 % parannuksia kohdefunktion arvoon löytyi eri kokeiluissa vielä 10–20 tunnin ajan. Sahauserien minimikokorajoitteiden toteuttaminen jälkikäsitteilyvaiheessa onnistui n. puolessa tunnissa.

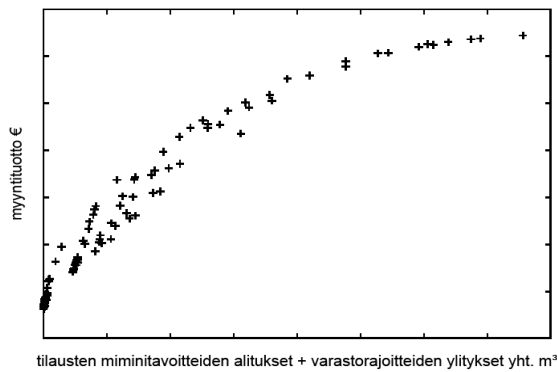
4 KOESOVELLUS SAHALLA

Toteuttamamme ohjelmiston avulla arvioitiin erään Metsäliiton sahan lajittelun tehostamispotentiaalia. Lähtötiedot koottiin sahan toiminnanohjausjärjestelmien historiatiedoista valitulta suunnittelujaksolta: tukkien kokojakauma muodostettiin todellisista tukkien mittaustuloksista ja tilauskantaan valikoitiin sekä laskutettuja tilauksia että tilauksia, joita ei todellisuudessa kyetty toimittamaan. Sahausaseteiksi määriteltiin kaikki tuotantokäytössä esiintyvät asetteet.

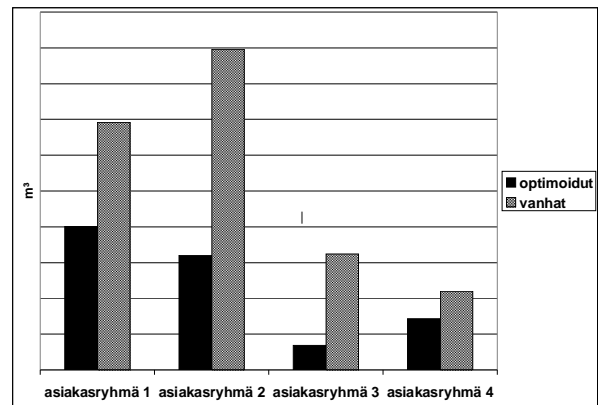
Optimoinnin alkuratkaisuna käytettiin tukkiloikkia, joita sahalli oli todellisuudessa käytetty suunnittelujakson alussa. Samaa käsin suunniteltua alkuratkaisua käytettiin myös vertailukohtana optimoidulle ratkaisulle eri skenaarioissa. Yksinkertaisuuden vuoksi vertailussa kuitenkin sahausasetteiden käyttö (sahauserät) laskettiin optimointialgoritmin kautta myös alkuratkaisulle. Vertailu kohdistui siis pelkkiin tukkiloikkien parannuksiin.

Selvitimme luvussa 2.1 kuvatulla yksinkertaistetulla mallilla, kuinka tilausten minimimitavoitteiden ja varastorajoitteiden sakkokustannuskertoimet vaikuttavat ratkaisun tunnuslukuihin (Kuva 5). Valitsimme neljät eri arvot vertailuun varsinaisella optimointimallilla ja sitten sopivimmat arvot myöhempiin tarkasteluihin.

Optimointituloksina tuotettiin keskeisten tunnuslukujen kuten myyntituoton lisäksi yksityiskohtaiset tiedot tukkiloikkien muotoilusta, sahauseristä, tuotetuista tuotteista ja tilausten toteutumisesta. Kuva 6 esittää esimerkkinä yhteenvedon asiakastilausten toteutumisesta ennen ja jälkeen optimoinnin.



Kuva 5 Yhteenveto yksinkertaistetun mallin optimointituloksista sakkokustannuserrointen eri arvoilla. Kuvasta nähdään, kuinka tilausten tavoitemääristä joustamalla ja arvokkaimpiin tuotteisiin keskittymällä myyntituotto paranee.



Kuva 6 Eri asiakasryhmien tilausten tavoitemäärien alitukset sekä optimoiduilla tukkiluokilla että käsin suunnitellun alkuratkaisun tukkiluokilla.

Edellä kuvattujen lähtötietojen lisäksi tarkasteltiin useita vaihtoehtoisia skenaarioita. Sahan lajittelulokeroiden määrän kasvattamisen kannattavuutta arvioitiin yksinkertaisesti asettamalla lajittelulokeroiden määrä optimoinnissa todellista suuremmaksi. Sahatavaran markkinatilanteen muutosten vaikutusta lajitteluun arvioitiin kahdessa Metsäliiton määrittelemässä skenaariossa, joissa suunnittelujakson tilauskantaa muutettiin.

Raakapuun markkinatilanteen muutoksen vaikutusta lajitteluun arvioitiin tuottamalla vaihtoehtoinen tukkien kokojakauma myöhemmältä jaksolta kuin muut optimoinnin lähtötiedot. Lisäksi erillisessä skenaariossa tukkien kokojakaumaa muutettiin manuaalisten katkaisupäätösten simuloimiseksi (muutoin käytettiin sahaussimulaattorin laskemia katkaisupäätöksiä sellaisinaan).

5 JOHTOPÄÄTÖKSET

Kehittämällä yksityiskohtainen optimointimalli yksittäistä toiminnansuunnittelun osa-aluetta varten voidaan saada esille juuri kyseisen osa-alueen kehittymismahdollisuudet, mutta usein suurimmat tehostamismahdollisuudet ovat löydettävissä yleisluontoisemman järjestelmätason tarkastelun kautta, ja yksittäisten toimintojen optimointi on kannattavaa vasta sitten, kun toiminta kokonaisuutena on sekä vakiintunutta että taloudellisesti tehokasta.

Yksityiskohtainen optimointi edellyttää paitsi kattavia tietokantoja lähtötietojen tuottamiseksi, myös tuotantoa käytännössä suunnittelevien henkilöiden aktiivista osallistumista kehitystyöhön työkalun luotettavuuden takaamiseksi. Osallistuminen voi myös osaltaan lisätä suunnittelijan luottamusta optimointialgoritmiin.

Käytännön haasteita optimointimallin soveltamisessa ovat toisaalta tilauskannan ennustaminen eri aikajänneille ja toisaalta pitkä laskenta-aika, joka tekee eri vaihtoehtojen kokeilusta hankalaa. Lisäksi mallin parametriasetusten ylläpito vaatii työtä, ja erityisesti sakkokustannuskertoimien asettaminen muiden kuin rahassa suoraan mitattavien tekijöiden kuvaamiseksi on haasteellista. Tällaisenaan malli soveltuikin paremmin sahan tuotevalikoiman strategisen suunnittelun apuvälineeksi kuin operatiiviseksi työkaluksi.

Optimointisovellusta voidaan kehittää edelleen paitsi nykyistä nopeampia ratkaisualgoritmeja kehittämällä, myös huomioimalla mallissa eksplisiittisesti tilauskannan ja tukkien hankinnan epävarmuudet.

6 KIRJALLISUUSLUETTELO

1. Ahuja, R. et al.: A survey of very large-scale neighborhood search techniques. *Discrete Applied Mathematics* 123(2002)1–3, 75–102.
2. Skog, J.: *Dynamisk Timmerklassläggning - Metod för kontinuerlig optimering av råvarustyrning vid sågverk*. Examensarbete, Umeå universitet Institutionen för fysik, 2004.
3. Usenius, A.: *Sahaussatteen simulointimalli*. Väitöskirja, Teknillinen korkeakoulu. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Puulaboratorio, Tiedonanto 5, Espoo, 1980.

LIITE A OPTIMOINTIMALLIN FORMAALI MÄÄRITTELY

Formaalin määrittelyn lähtökohtana on mahdollisten tukkityyppien joukko I , joka sisältää kaikki tukin läpimitan (millimetreinä), pituusluokan ja laadun kombinaatiot. Suunnittelujaksolla sahattavien tyyppin $i \in I$ tukkien kokonaistilavuutta (m^3) merkitään V_i :llä.

Mahdollisten tukkiluokkien joukko C jakautuu pituus-läpimittaluokkiin C_P ja läpimittaluokkiin C_L . Indikaattori α_{ci} saa arvon 1, jos tukkityyppi $i \in I$ kuuluu tukkiluokkaan $c \in C$, ja muutoin 0. Koska mahdollisia tukkiluokkia on valtava määrä, käytännössä joukkojen C , C_P ja C_L asemesta käytetään niiden osajoukkoja, joita päivitetään laskennan edetessä.

S on käytettävissä olevien sahausasetteiden joukko ja P sahaustuotteiden joukko. Sahattaessa tyyppin $i \in I$ tukki asetteella $s \in S$ tuotteen $p \in P$ saanto on $r_{si}^p \cdot \text{m}^3/\text{tukkikuutiometri}$. Sahauserän minimikoko on $B_{\min} \text{m}^3$.

Osatilausten joukkoa merkitään T :llä ja osatilaukseen $t \in T$ tuotetun kuutiometrin marginaalista arvoa v_t :llä. Osatilaukseen on sahattava eri tuotteita annettujen tilavuusosuuksien θ_{tp} , $p \in P$, mukaisessa suhteessa, missä $\sum_{p \in P} \theta_{tp} = 1$. Osatilaukseen sahattujen tuotteiden kokonaismäärä ei saa ylittää $b_t \text{m}^3$; varastorajoitteen maksimimäärän ylitys voi kuitenkin olla periaatteessa mielivaltaisen suuri ja sen kohdalla asetetaan $b_t = \infty$.

PÄÄTÖSMUUTTUJAT

$z_c \in \{0, 1\}$	$c \in C$	saa arvon 1, jos tukkiluokka c on käytössä, ja muutoin 0.
$x_{sc} \in [0, 1]$	$s \in S, c \in C$	on asetteella s sahattava osuus luokan c tukeista tai 0, jos tukkiluokka c ei ole käytössä.
$u_{si} \in [0, 1]$	$s \in S, i \in I$	kuvaava osuutta, joka sahataan asetteella s tyyppin i tukista silloin, kun tyyppin i tukit sijoittuvat läpimittaluokkaan; jos tyyppin i tukit lajitellaan pituus-läpimittaluokkaan, $u_{si} = 0$ kaikilla $s \in S$.
$y_t \in [0, b_t]$	$t \in T$	on osatilaukseen t sijoitettavien tuotteiden kokonaistilavuus.

PÄÄMALLI

Kohdefunktio (1) on osatilauksiin sijoitettujen tuotteiden arvojen summa, johon sisältyvät tilausten minimimäärien alitussakot ja varastorajoitteiden ylityssakot.

Rajoitteilla (2) täsmätään kunkin tuotteen sahattu määrä ja osatilauksiin sijoitettu määrä. Rajoitteilla (3) pakotetaan sahaukseen eri asetteilla täsmälleen ne tukkiluokat, jotka ovat käytössä. Rajoite (4) kieltää käyttämästä enemmän kuin N tukkiluokkaa, missä N on lajittelulokeroiden määrä.

Rajoitteet (5) estävät läpimittaluokkien päällekkäisyyden. Rajoitteet (6) paitsi estävät pituus-läpimittaluokkien päällekkäisyyden, myös varmistavat, että jokainen tukkityyppi päättyy sahaukseen joko pituus-läpimittaluokassa tai läpimittaluokassa. Rajoitteet (7) pakottavat läpimittaluokkien sahausta kullakin asetteella $s \in S$ tukkityypeittäin kuvaavat muuttujat (u_{si} , $i \in I$) ja tukkiluokittain kuvaavat muuttujat (x_{sc} , $c \in C$) yhtäpitäviksi.

Sahauserien minimikokorajoitteet toteutettiin määrittelemällä muuttujien x_{sc} käyvät arvoalueet suoraan muodossa (8), joka on mahdollista huomioida sellaisenaan branch-and-bound-algoritmin logiikassa. Kuten luvussa 3 mainitaan, kyseiset rajoitteet otettiin kuitenkin huomioon vasta erillisessä pääalgoritmin jälkikäsitteilyvaiheessa.

$$\max \sum_{t \in T} v_t y_t \quad (1)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{i \in I} r_{si}^p V_i \left(\sum_{c \in C_P} \alpha_{ci} x_{sc} + u_{si} \right) = \sum_{t \in T} \theta_{tp} y_t \quad \forall p \in P \quad (2)$$

$$\sum_{s \in S} x_{sc} = z_c \quad \forall c \in C \quad (3)$$

$$\sum_{c \in C} z_c \leq N \quad (4)$$

$$\sum_{c \in C_L} \alpha_{ci} z_c \leq 1 \quad \forall i \in I \quad (5)$$

$$\sum_{c \in C_P} \alpha_{ci} z_c + \sum_{s \in S} u_{si} = 1 \quad \forall i \in I \quad (6)$$

$$u_{si} \leq \sum_{c \in C_L} \alpha_{ci} x_{sc} \quad \forall s \in S, i \in I \quad (7)$$

$$x_{sc} = 0 \quad \text{tai} \quad B_{\min} / \sum_{i \in I} \alpha_{ci} V_i \leq x_{sc} \leq 1 \quad \forall s \in S, c \in C \quad (8)$$